



SISTEMA NAZIONALE PER L'ACCREDITAMENTO DI LABORATORI

DT-0002/2

**ESEMPI APPLICATIVI DI VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA NELLE
MISURAZIONI MECCANICHE**

INDICE

parte	sezione	pagina
1.	Misurando	2
2.	Modello della misurazione	3
3.	Prove di trazione	4
4.	Altri dati del problema	4
5.	Miglior stima della media	6
6.	Calcolo della incertezza composta	6
7.	Calcolo della incertezza estesa	6
8.	Dichiarazione dell'incertezza	7
9.	Considerazioni sulla scelta della numerosità del campione	7

Determinazione di $R_{p0,2}$ (carico unitario di scostamento dalla proporzionalità dello 0,2%) per un manufatto in lega di alluminio da lavorazione plastica rinforzata per precipitazione

1. Misurando

Dal manufatto si prelevano alcune provette e su ciascuna di esse si effettua la prova (distruttiva) di trazione.

Le prove vengono effettuate su una macchina di trazione della capacità di 100 kN, alla stessa temperatura alla quale è stata effettuata la taratura.

Come indicato nella figura 1, la macchina produce un diagramma che rappresenta la forza applicata F (newton) in funzione dell'allungamento percentuale A_p della provetta. Per il punto dell'asse delle ascisse di valore $A_p = 0,2\%$ si traccia la parallela al tratto rettilineo di tale diagramma, che incontra il diagramma stesso nel punto P . L'ordinata di questo punto, uguale ad \overline{OB} , si indica con il simbolo $F_{0,2}$. Si indica inoltre con S_0 l'area della sezione trasversale iniziale della provetta.

Il misurando viene definito come segue:

$$R_{p0,2} = \frac{F_{0,2}}{S_0} \quad (1)$$

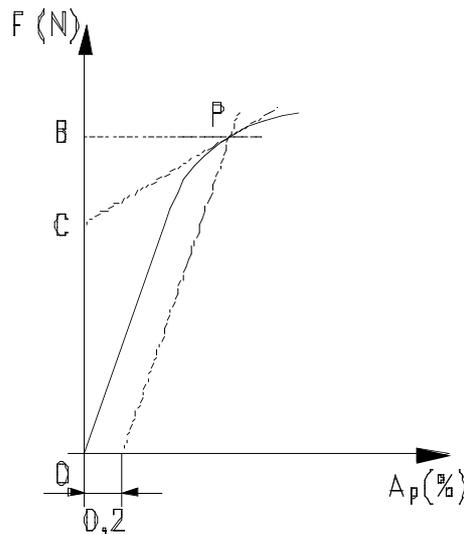


Figura 1

DT-0002/2 * INCERTEZZA NELLE MISURAZIONI MECCANICHE

2. Modello della misurazione

Dalla precedente definizione deriva il seguente modello della misurazione:

$$R_{p0,2} = \frac{F_{0,2} + \Delta F_{0,2} + \Delta A_p \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{PB}} \right)}{S_o} \quad (2)$$

nel quale:

- $F_{0,2}$ è l'ordinata del punto P ;
- $\Delta F_{0,2}$ è la correzione determinata dalla taratura della macchina di trazione in corrispondenza al valore letto di $F_{0,2}$ (correzione che potrebbe anche essere nulla, ma sempre affetta da una incertezza tipo $u(\Delta F_{0,2})$).
- ΔA_p è la correzione determinata dalla taratura dell'estensimetro in corrispondenza al valore letto di $A_p = 0,2\%$ (vale anche in questo caso la considerazione fatta per $F_{0,2}$);
- il rapporto $\left(\frac{\overline{BC}}{\overline{PB}} \right)$ viene introdotto per il seguente motivo. Supposto che la taratura indichi che alla lettura dell'estensimetro debba essere applicata una correzione ΔA_p , questa si riflette sulla lettura di $F_{0,2}$ tramite uno spostamento del punto P sulla curva carico-allungamento. Il problema è come esprimere matematicamente la relazione $F \sim f(A_p)$ in quanto la curva carico-allungamento è sperimentale.

Si può farlo per approssimazione, specie se la correzione ΔA_p è molto piccola, assimilando la curva carico-allungamento, nell'intorno del punto P , con la tangente tracciata alla curva stessa nel punto P : allora la variazione della forza F sarà semplicemente proporzionale a ΔA_p , come indicato nella formula (2).

L'incertezza tipo composta assoluta è allora data dall'espressione:

$$\left[u_c(R_{p0,2}) \right]^2 = \frac{1}{S_o^2} \left\{ \left[u(\overline{F}_{0,2}) \right]^2 + \left[u(\Delta F_{0,2}) \right]^2 + \left[u \left(\Delta A_p \frac{\overline{BC}}{\overline{PB}} \right) \right]^2 \right\} + \frac{1}{S_o^4} \left(\overline{F}_{0,2} + \Delta F_{0,2} + \Delta A_p \frac{\overline{BC}}{\overline{PB}} \right)^2 \left[u(\overline{S}_o) \right]^2$$

La determinazione dell'incertezza associata con la misurazione di S_o richiede che si determini il corrispondente modello. Supponendo che si tratti di una provetta a sezione circolare di diametro nominale d_o , si ha:

$$S_o = \frac{\pi \cdot d_o^2}{4}$$

Il modello è dato allora dall'espressione:

$$S_o = \frac{\pi}{4} \cdot (d_o + \Delta d_o)^2 \quad (4)$$

dove Δd_o è la correzione determinata dalla taratura del micrometro con cui si misura il diametro della provetta, in corrispondenza al valore letto di d_o .

Pertanto l'incertezza tipo $u(\overline{S}_o)$ da inserire nella formula (3) sarà:

$$\left[u(\overline{S}_o) \right]^2 = \left[\frac{\pi}{2} \cdot (\overline{d}_o + \Delta d_o) \right]^2 \cdot \left\{ \left[u(\overline{d}_o) \right]^2 + \left[u(\Delta d_o) \right]^2 \right\} \quad (5)$$

DT-0002/2 * INCERTEZZA NELLE MISURAZIONI MECCANICHE

3. Prove di trazione

Supposto che non si disponga di alcuna esperienza in proposito, occorre stimare la dispersione del misurando mediante una serie di misurazioni ripetute. Normalmente il numero di queste misurazioni deve essere piccolo poiché le eccedenze lasciate appositamente per l'esecuzione delle prove sono anch'esse di piccolo volume.

Diverso è il caso di un manufatto fabbricato in serie, perché allora uno degli elementi della serie stessa può essere distrutto per determinare una volta per tutte la dispersione del misurando.

Nel presente esempio applicativo sono state sottoposte alla prova 3 provette cilindriche del diametro nominale di 10 mm, ottenendo in ordine cronologico i risultati seguenti:

$$F_{0,2} = 34460 \text{ N}, 34932 \text{ N}, 33833 \text{ N}$$

La media risulta:

$$\bar{F}_{0,2} = \frac{34460 + 34932 + 33833}{3} = 34408 \text{ N}$$

e lo scarto sperimentale assoluto della media:

$$s(\bar{F}_{0,2}) = \left[\frac{(34460 - 34408)^2 + (34932 - 34408)^2 + (33833 - 34408)^2}{3 \cdot 2} \right]^{1/2} = 318,3 \text{ N}$$

Lo stesso scarto può essere espresso in valore relativo percentuale:

$$s(\bar{F}_{0,2}) = \frac{s(\bar{F}_{0,2})}{\bar{F}_{0,2}} \cdot 100 = \frac{318,3}{34408} \cdot 100 = 0,92 \%$$

4. Altri dati del problema

4.1. La taratura della macchina di trazione ha stabilito che nell'intorno di $F = 30 \text{ kN}$ la lettura di $F_{0,2}$ debba essere accresciuta di 160 N , con un'incertezza tipo di 80 N .

La taratura dell'estensimetro ha stabilito a sua volta che la lettura di A_p debba essere, nell'intorno di $A_p = 0,2\%$, diminuita di $0,001\%$, con un'incertezza tipo di $0,004\%$.

Dal diagramma della figura si legge che $\frac{BC}{PB} = 8898 / 0,933 = 9568 \text{ N}/\%$.

Pertanto si avrà:

$$u(\Delta F_{0,2}) = 80 \text{ N}$$

$$u\left(\Delta A_p \frac{BC}{PB}\right) = 0,004 \cdot 9568 = 38,3 \text{ N}$$

$$\Delta F_{0,2} = 160 \text{ N}$$

$$\Delta A_p = -0,001$$

DT-0002/2 * INCERTEZZA NELLE MISURAZIONI MECCANICHE

4.2. Per determinare l'area della sezione trasversale della provetta sono state effettuate 10 misurazioni del diametro con un micrometro tarato, ottenendo i valori riportati nella tabella 1.

Tabella 1 - Risultati delle misurazioni del diametro delle provette

n	d _o (mm)	n	d _o (mm)
1	10,10	6	10,08
2	10,12	7	10,10
3	10,09	8	10,10
4	10,13	9	10,13
5	10,12	10	10,11

dai quali deriva:

$$\bar{d}_o = \frac{101,1}{10} = 10,11 \text{ mm}$$

e quindi anche:

$$\bar{S}_o = 80,2 \text{ mm}^2$$

Lo scarto sperimentale della media di \bar{d}_o , e perciò anche l'incertezza tipo, risulta:

$$u(\bar{d}_o) = \left[\frac{\sum (d_o - \bar{d}_o)^2}{10 \cdot 9} \right]^{1/2} = \left[\frac{0,00256}{90} \right]^{1/2} = 0,00533 \text{ mm}$$

La taratura del micrometro ha inoltre stabilito che la correzione da apportare alla lettura di d_o è nulla, e che la relativa incertezza tipo è uguale a 0,02 mm.

Pertanto risulta:

$$\Delta d_o = 0$$
$$u(\Delta d_o) = 0,02 \text{ mm}$$

Applicando l'equazione (5) si può ora calcolare la varianza riguardante la determinazione della sezione S_0 :

$$\left[u(\bar{S}_o) \right]^2 = \left(\frac{\pi}{2} \cdot 10,11 \right)^2 (0,00533^2 + 0,02^2) = 251,8 \cdot (0,0000284 + 0,0004) = 0,11 \text{ mm}^4$$

e pertanto, estraendo la radice quadrata, l'incertezza tipo assoluta risulta:

$$u(\bar{S}_o) = 0,33 \text{ mm}^2$$

L'incertezza tipo percentuale è quindi:

$$u(\bar{S}_o) = \frac{u(\bar{S}_o)}{\bar{S}_o} \cdot 100 = \frac{0,33}{80,2} \cdot 100 = 0,41\%$$

DT-0002/2 * INCERTEZZA NELLE MISURAZIONI MECCANICHE

5. Miglior stima della media

La miglior stima della media del misurando si ottiene dalla formula (2) assegnando ad $F_{0,2}$ il valore della media sperimentale $\bar{F}_{0,2}$, a $\Delta F_{0,2}$ ed a ΔA_p i valori calcolati al punto 4.1, a S_0 il valore della media sperimentale S_0 . Si avrà così:

$$\bar{R}_{p0,2} = \frac{34408 + 160 - 0,001 \cdot 9568}{80,2} = 430,9 \text{ N mm}^{-2}$$

6. Calcolo della incertezza composta

Per il calcolo della incertezza composta si deve procedere applicando la relazione (3) e utilizzando i dati disponibili.

Il calcolo della varianza è il seguente:

$$\begin{aligned} [u_c(R_{p0,2})]^2 &= \frac{1}{80,2^2} (318,3^2 + 80^2 + 38,3^2) + \frac{1}{80,2^4} (34408 + 160 - 0,001 \cdot 9568)^2 \cdot 0,33^2 = \\ &= (16,97 + 3,15) = 20,12 \text{ N}^2 \text{ mm}^{-4} \end{aligned}$$

Infine si estrae la radice quadrata per ottenere l'incertezza composta assoluta:

$$u_c(R_{p0,2}) = 4,50 \text{ N mm}^{-2}$$

Il valore relativo percentuale è allora:

$$u_c(R_{p0,2}) = \frac{u_c(R_{p0,2})}{\bar{R}_{p0,2}} \cdot 100 = \frac{4,50}{430,9} \cdot 100 = 1,04\%$$

Si può constatare che l'incertezza tipo composta del misurando dipende sostanzialmente dall'incertezza da cui è affetta la misurazione della forza.

7. Calcolo della incertezza estesa

Poiché il numero dei campioni sottoposti alla prova di trazione è piccolo (<10), per il calcolo della incertezza estesa si deve ricorrere al parametro t_p della distribuzione di Student.

Per poter applicare tali criteri, è necessario determinare i gradi di libertà del sistema ricorrendo alla formula di Welch-Satterthwaite che, nel caso in oggetto, può essere utilizzata nella forma semplificata.

Se per la prova di trazione si usano 3 provette, i gradi di libertà del relativo sistema sono dati da $\nu = n - 1 = 3 - 1 = 2$, mentre per la determinazione della sezione delle provette, se si effettuano 10 misurazioni, i gradi di libertà sono $\nu = n - 1 = 10 - 1 = 9$.

Il valore effettivo dei gradi di libertà è allora dato dalla seguente relazione nella quale si devono usare i valori relativi:

$$\nu_{eff} = \frac{u(y)^4}{\sum [u(x_i)^4 / \nu_i]} = \frac{1,04^4}{0,92^4 / 2 + 0,41^4 / 9} = 3,22$$

nella quale le incertezze sono espresse in valore relativo.

DT-0002/2 * INCERTEZZA NELLE MISURAZIONI MECCANICHE

I gradi di libertà effettivi da considerare per determinare l'incertezza estesa sono 3 (il primo valore intero minore di quello calcolato).

Come livello di fiducia si può scegliere, come di norma, il 95 % (anche se non si esclude la possibilità di scegliere un altro valore qualsiasi).

A questo punto è possibile ricavare dalla tabella 2 del documento principale il valore del fattore di copertura da applicare, leggendolo in corrispondenza delle due coordinate sopra indicate. Esso risulta pari a 3,18.

Si può ora calcolare l'incertezza estesa assoluta moltiplicando quella composta assoluta per il suddetto fattore:

$$U(R_{p0,2}) = u(R_{p0,2}) \cdot t_p = 4,50 \cdot 3,18 = 14,3 \text{ N / mm}^2$$

Si può calcolare infine il valore dell'incertezza estesa relativa percentuale per la quale si ottiene:

$$\mathcal{U}(R_{p0,2}) = \frac{U(R_{p0,2})}{\bar{R}_{p0,2}} = \frac{14,3}{430,9} \cdot 100 = 3,32 \%$$

8. Dichiarazione dell'incertezza

La miglior stima della media del misurando $R_{p0,2}$, calcolata per 3 provette come riportato al punto 5, è risultata pari a $430,9 \text{ N mm}^{-2}$

L'incertezza estesa U , calcolata per 3 provette come illustrato al punto 7, è risultata pari a $14,3 \text{ N mm}^{-2}$.

Il risultato della misurazione potrà quindi essere espresso come segue:

$$R_{p0,2} = (430,9 \pm 14,3) \text{ N mm}^{-2}$$

In alternativa, l'incertezza può anche essere espressa in valore relativo percentuale:

$$R_{p0,2} = 430,9 \text{ N mm}^{-2} \pm 3,3 \%$$

La dichiarazione della incertezza estesa deve essere completata fornendo anche i valori del fattore di copertura utilizzato ($k = 3,18$) e del livello di fiducia (95 %) ai quali si è fatto riferimento.

9. Considerazioni sulla scelta della numerosità del campione

Per evidenziare gli effetti che la numerosità del campione può avere sui risultati della prova ed in particolare sulla stima della incertezza, si è proceduto alle seguenti ulteriori prove e alle relative elaborazioni:

- è stata sottoposta a prova di trazione una quarta provetta delle stesse caratteristiche e della stessa origine di quelle utilizzate per l'esempio precedente, ottenendo il risultato di 34100 N e sono stati ripetuti i calcoli (esempio con 4 provette);
- i quattro dati disponibili sono stati raggruppati a tre a tre, in modo da poter svolgere ulteriori calcoli (esempi con 3 provette);
- i quattro dati disponibili sono stati poi raggruppati a due a due, in modo da poter scegliere le due coppie che presentavano tra loro il minore e il maggior scarto, anch'esse utilizzate per una ulteriore serie di calcoli dello stesso tipo precedente (esempi con 2 provette).

L'insieme dei risultati ottenuti dai calcoli delle medie e degli scarti tipo delle medie sono riportati nella tabella 2.

DT-0002/2 * INCERTEZZA NELLE MISURAZIONI MECCANICHE

Tabella 2 - Calcolo delle medie e degli scarti tipo di $F_{0,2}$

Numero provette	Valore medio (N)	Scarto tipo della media	
		(N)	(%)
4	34 330	238	0,69
3	34 408	318	0,92
3	34497	241	0,70
3	34288	331	0,96
3	34131	182	0,53
2	33 966	133	0,39
2	34 382	549	1,60

Si è quindi proceduto al calcolo delle incertezze composte relative ottenendo i risultati raccolti nella tabella 3.

Tabella 3 - Calcolo delle incertezze composte

Numero provette	Incertezza tipo di $F_{0,2}$ (%)	Incertezza tipo di S_0 (%)	Incertezza composta (%)
3	0,92	0,41	1,04
3	0,70	0,41	0,85
3	0,96	0,41	1,07
3	0,53	0,41	0,71
2	0,39	0,41	0,62
2	1,60	0,41	1,66

Per la determinazione delle incertezze estese si è ovviamente fatto ricorso alla distribuzione t , assumendo come gradi di libertà quelli determinati con la formula di Welch-Satterthwaite. I risultati ottenuti sono stati raccolti nella tabella 4.

Tabella 4 - Calcolo dell'incertezza estesa per il livello di fiducia 95%

Numero delle provette	Numero dei gradi di libertà	Incertezza composta		Fattore di copertur a $t_p = k$	Incertezza estesa	
		(N/mm ²)	(%)		(N/mm ²)	(%)
4	6	8,90	0,84	2,45	8,9	2,07
3	3	4,50	1,04	3,18	14,3	3,32
3	4	3,65	0,85	2,76	10,1	2,35
3	3	4,31	1,07	3,18	13,7	3,40
3	6	3,08	0,71	2,45	7,55	1,75
2	5	2,65	0,62	2,61	6,91	1,62
2	1	7,15	1,66	12,7	90,8	21,1

Dall'esame dei risultati ottenuti e per il livello di fiducia del 95 %, si può osservare quanto segue:

- le incertezze estese per le combinazioni di 2 provette risultano notevolmente disperse (per il caso esaminato, tra 1,62 e 21,1 %), per cui si deve assumere che prove con un numero di provette così limitato siano, in genere, scarsamente attendibili;

DT-0002/2 * INCERTEZZA NELLE MISURAZIONI MECCANICHE

- le incertezze estese trovate per le combinazioni di 3 provette risultano, in tutti i casi meno uno, maggiori di quella trovata per 4 provette, per cui si ha ragione di ritenere che passando da 3 a 4 provette l'incertezza estesa tenda mediamente a diminuire, ma probabilmente non di tanto da giustificare l'impiego di quattro provette e il maggiore costo delle prove;
- la scelta di 3 o 4 provette, che conduce comunque a risultati da ritenere adeguati per il tipo di misurazione in esame, può anche essere oggetto di considerazioni che esulano dall'ambito strettamente misuristico.

In base a quanto sopra esposto, appare quindi logico escludere l'utilizzazione di sole 2 provette in quanto ciò risulterebbe fortemente penalizzante in termini di qualità della misurazione e carente per l'eliminazione di eventuali risultati abnormi, a meno che si disponga di dati storici per cui si possa considerare noto lo scarto tipo di $F_{0,2}$.

Si può quindi concludere che un numero di provette uguale a 3 dovrebbe rappresentare un ragionevole compromesso fra l'esigenza di non accrescere troppo il costo della prova e quella di ottenere risultati sufficientemente affidabili.