# Criteri generali per la valutazione dell'incertezza di misura

Francesca Pennecchi
f.pennecchi@imgc.cnr.it
Istituto di Metrologia "G. Colonnetti"
(IMGC-CNR, Torino)

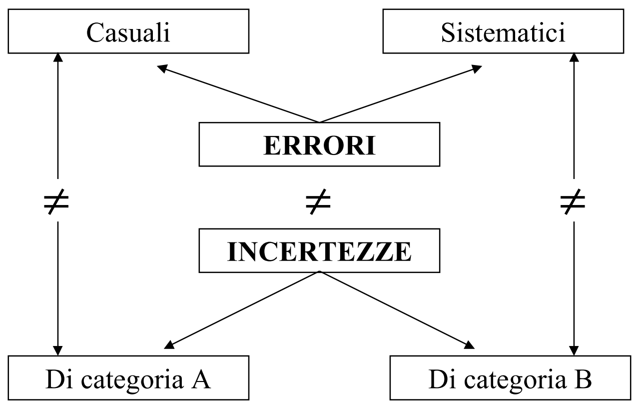


**INCERTEZZA (di misura)**

(dalla UNI CEI ENV 13005, Guida all'espressione dell'incertezza di misura, Milano 2000)

**Parametro, associato al risultato di una misurazione, che caratterizza la dispersione dei valori ragionevolmente attribuibili al misurando.**

In generale, il **risultato di una misurazione** è solamente un'approssimazione o **stima** del valore del misurando ed è pertanto completo solamente quando sia accompagnato da una dichiarazione dell'**incertezza** di quella stima.



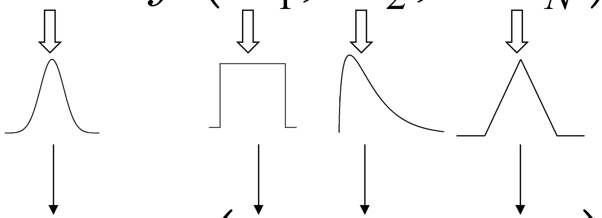



## FONTI DI INCERTEZZA

- Definizione incompleta del misurando;
- Imperfetta realizzazione della definizione del misurando;
- Non rappresentatività della campionatura (…);
- Inadeguata conoscenza degli effetti delle condizioni ambientali sulla misurazione…;
- Distorsione personale dell'operatore nella lettura degli strumenti analogici;
- Risoluzione o soglia di risoluzione strumentali non infinite;
- Valori non esatti di campioni e materiali di riferimento;
- Valori non esatti di costanti ed altri parametri ottenuti da fonti esterne …;
- Approssimazioni ed ipotesi semplificatrici inerenti al metodo ed al procedimento sperimentali;
- Variazioni nelle osservazioni del misurando ripetute in condizioni apparentemente identiche.

## MODELLO DELLA MISURAZIONE

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ldots X_N\right)$$



$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_N\right)$$

Istituto di Metrologia "G. Colonnetti"
Francesca Pennecchi



## VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA DI *y*

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_N\right)$$

$$\underbrace{u_c(y)}_{\text{Incertezza tipo composta di } y} \overset{?}{\Longleftarrow} \underbrace{u(x_1) \quad u(x_2) \quad u(x_N)}_{\text{Incertezze tipo delle grandezze d'ingresso}}$$

Incertezza estesa $\boxed{U = k u_c(y)}$

Istituto di Metrologia "G. Colonnetti"
Francesca Pennecchi

## VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA TIPO DELLE $X_i$

• Di categoria **A** (quando sono disponibili *n* misure ripetute $X_{i,k}$ di $X_i$).

$$x_i = \overline{X}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_{i,k}$$ Stima di $X_i$

$$u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i) = \frac{s^2(X_i)}{n} = \frac{1}{n}\frac{1}{(n-1)}\sum_{k=1}^{n}(X_{i,k} - \overline{X}_i)^2$$

Varianza di categoria A

$$u(x_i) = s(\overline{X}_i)$$ Incertezza tipo di categoria A

$$\nu_i = n - 1$$ Gradi di libertà di $u(x_i)$



• Di categoria **B** (quando NON sono disponibili misure ripetute di $X_i$).

$x_i$ Stima di $X_i$

$u^2(x_i)$ Varianza di categoria B

$u(x_i)$ Incertezza tipo di categoria B

Valutate grazie ad un giudizio scientifico basato su tutte le informazioni disponibili sulla possibile variabilità di $X_i$.

$$\nu_i \approx \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta u(x_i)}{u(x_i)}\right]^{-2}$$ Gradi di libertà di $u(x_i)$

**VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA TIPO COMPOSTA DI *y***

grazie alla …

**LEGGE DI PROPAGAZIONE DELL'INCERTEZZA**

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + \boxed{2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)}$$

$\Updownarrow$ Oppure

$$\boxed{2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j)}$$



dove…

| | |
|---|---|
| $u(x_i)$ | Incertezza tipo di $X_i$ |
| $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ | Coefficiente di sensibilità |
| $u(x_i, x_j)$ | Covarianza (stimata) tra $X_i$ e $X_j$ |
| $r(x_i, x_j) = \dfrac{u(x_i, x_j)}{u(x_i) u(x_j)}$ | Coefficiente di correlazione (stimato) tra $X_i$ e $X_j$ |

DIMOSTRAZIONE (caso di grandezze d'ingresso non correlate)

$$Y \approx f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N) + \sum_{i=1}^{N} \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i=\mu_i} (X_i - \mu_i)$$

$$\Rightarrow E(Y) \approx f(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_N)$$

$$E(Y - E(Y))^2 \approx \sum_{i=1}^{N} \left( \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i=\mu_i} \right)^2 E(X_i - \mu_i)^2$$

$$\Rightarrow \sigma^2(Y) \approx \sum_{i=1}^{N} \left( \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i=\mu_i} \right)^2 \sigma^2(X_i)$$



APPROSSIMAZIONE

$$\sigma^2(Y) \approx \sum_{i=1}^{N} \left( \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i=\mu_i} \right)^2 \sigma^2(X_i)$$

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left( \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_{X_i=x_i} \right)^2 u^2(x_i)$$

**Difficoltà di applicazione**: quando il modello è fortemente non lineare o le incertezze non stimano bene le deviazioni standard ignote o le stime delle grandezze d'ingresso differiscono sensibilmente dalle medie incognite.

## VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA DI *y*

$$y = f\left(x_1, x_2, \ldots x_N\right)$$

$$u_c\left(y\right) \quad u\left(x_1\right) \quad u\left(x_2\right) \quad u\left(x_N\right)$$

Legge di propagazione incertezza



## VALUTAZIONE DELL'INCERTEZZA ESTESA DI *y*

$$\boxed{U_p = k_p u_c\left(y\right)}$$

***k*** è il **fattore di copertura** che rende l'intervallo **[*y*-*U*,*y*+*U*]** un **intervallo di fiducia** ad un determinato **livello di fiducia *p***.

<u>OSSERVAZIONE</u>: per scegliere *k*, occorre conoscere la distribuzione di probabilità associata al risultato della misurazione. Per una distribuzione normale, per esempio, *k*=2(3) fornisce un intervallo con un livello di fiducia del 95(99)%.

## TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

**ovvero**

## DISTRIBUZIONE NORMALE PER LA *Y*

Data $Y = c_1X_1+\ldots+c_nX_N$, la distribuzione di $Y$ può essere approssimata da una normale con media e varianza date da:

$$E(Y) = \sum c_i E(X_i)$$

$$\sigma^2(Y) = \sum c_i^2 \sigma^2(X_i)$$

Se le condizioni di validità del teorema sono soddisfatte, una prima approssimazione per calcolare $U_p$ è quella di usare i valori $k_p$ per una normale.



## DISTRIBUZIONE *t* DI STUDENT PER LA *Y*

In realtà, i dati a disposizione sono solo le stime $y = c_1x_1+\ldots+c_nx_N$ e $u_c^2(y)= c_1^2u^2(x_1)+\ldots+c_n^2u^2(x_N)$. In questo caso, la distribuzione della variabile standardizzata $(y-Y)/u_c(y)$ può essere approssimata da una distribuzione $t$ di Student con i seguenti gradi di libertà **effettivi**:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{N} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}}$$

formula di Welch-Satterthwaite, dove $u_i^2(y) = c_i^2 u^2(x_i)$

QUINDI:

$$\boxed{U_p = t_p(\nu_{eff})u_c(y)}$$

## LIMITAZIONI

• La non linearità del modello deve essere di lieve entità.

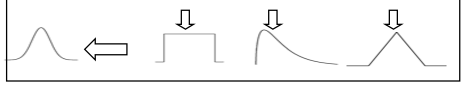
• Il teorema del limite centrale può essere invocato solo se sussistono le condizioni per una buona approssimazione della distribuzione di uscita con una normale od una *t* di Student.

• Le grandezze d'ingresso devono essere scorrelate.



Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement Supplement 1: Numerical Methods for the Propagation of Distributions (del JCGM-WG1).

$$Y = f\left(X_1, X_2, \ldots X_N\right)$$



"…This Supplement is concerned with the concept of the propagation of probability distributions through a model of measurement as a basis for the evaluation of uncertainty of measurement, and its implementation by Monte Carlo simulation… In particular, the provision of the probability density function for the output quantity value permits the determination of a coverage interval for that value corresponding to a prescribed coverage probability…"

Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement Supplement 2: The treatment of models with more than one output quantity (del JCGM-WG1).

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_N)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_N)$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x_N)$$

"…The Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (hereafter the GUM) deals mainly with the case of one measurand (… the univariate or scalar case). However, there exist several experimental situations in which more than one measurand are determined simultaneously from a common set of input quantities (… multivariate or vector cases). In these cases, uncertainty propagation treated in Clause 5 of the GUM needs appropriate extension…"

$$\mathrm{cov}(y_k, y_h) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_h}{\partial x_j} \mathrm{cov}(x_i, x_j)$$